

Oldřich SUCHARDA¹, Jiří BROŽOVSKÝ²

**PRUŽNOPLASTICKÉ MODELOVÁNÍ ŽELEZOBETONOVÉHO NOSNÍKU: IMPLEMENTACE
A SROVNÁNÍ S EXPERIMENTEM**

**ELASTIC-PLASTIC MODELLING OF REINFORCED CONCRETE BEAM:
IMPLEMENTATION AND COMPARISON WITH EXPERIMENT**

Abstrakt

Příspěvek se zabývá analýzou železobetonového nosníku metodou konečných prvků. Při analýze se předpokládá nelineární chování betonu a je užit rovinný výpočetní model. Konstitutivní model betonu uvažuje pružno-plastické chování betonu, které představuje fyzikální nelinearitu. Výztuž je modelována jako rozmazaná a předpokládá se jednoosý stav napjatosti. Příspěvek také obsahuje srovnání numerických výpočtů s experimentem. Popisovaný model betonu bude dále využit pro předpověď únosnosti podobných železobetonových konstrukcí.

Klíčová slova

Nosník, beton, metoda konečných prvků, výztuž, plasticita.

Abstract

The paper deals with finite element method analysis of the reinforced concrete beam. Within the analysis there is considered a non-linear behaviour of concrete. The constitutive model of concrete is based on the elastic-plastic behaviour. Reinforcement is modelled as smeared. The article also includes a comparison of the numerical calculations with the experiment. There is chosen the BSA software for the calculation.

Keywords

Beam, concrete, finite element method, reinforcement, plasticity.

1 ÚVOD

V současné době narůstá význam přesnějšího určování únosnosti železobetonových konstrukcí [2], neboť jde o jeden z důležitých podkladů pro výstižné stanovování jejich životnosti. V posledních zhruba čtyřiceti letech byla vypracována celá řada teorií a konstitutivních modelů pro beton a železobeton [14], [15]. Jednotlivé modely se liší jak svojí výstižností, tak výpočetní náročností a rozsahem vstupních dat. Zpravidla platí, že čím vyšší výstižnost modelu, tím jsou také vyšší nároky na množství a kvalitu vstupních údajů a vyšší je i výpočetní náročnost [18]. Často se také nelineární analýza betonových a železobetonových konstrukcí dále kombinuje s řešením vedení tepla [5] nebo se uplatňuje při simulacích dynamického zatížení [6].

¹ Ing. Oldřich Sucharda, Katedra stavební mechaniky, Fakulta stavební, VŠB-Technická univerzita Ostrava, Ludvíka Podéště 1875/17, 708 33 Ostrava - Poruba, tel.: (+420) 597 32 1391, e-mail: oldrich.sucharada@vsb.cz.

² Doc. Ing. Jiří Brožovský, Ph.D., Katedra stavební mechaniky, Fakulta stavební, VŠB-Technická univerzita Ostrava, Ludvíka Podéště 1875/17, 708 33 Ostrava - Poruba, tel.: (+420) 597 321 321, e-mail: jiri.brozovsky@vsb.cz.

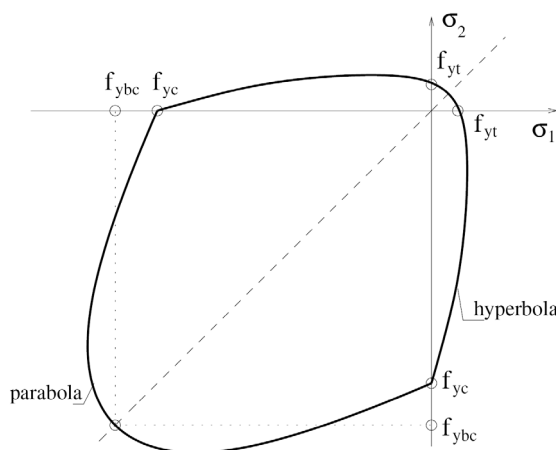
S ohledem na praktickou dostupnost potřebných vstupních údajů a na potřebu provádět výpočty opakovaně (ať už pro jednotlivé časové kroky nebo při simulačních výpočtech), je výhodné použít takový model, který bude vhodným kompromisem mezi výpočetní náročností, množstvím vstupních dat a potřebnou mírou výstižnosti dosahovaných výsledků.

V článku je prezentován pružnoplastický model, který je vhodný pro výše uvedené požadavky. Popisovaný model umožňuje modelovat chování do úrovně maximální únosnosti, což pro většinu předpokládaných účelů postačuje. Uvedený model využívá Chen-Chenovu podmínku plasticity [3] a Ohtaniho koncept zpevnění [12]. Protože obecný Ohtaniho model umožňuje použít řadu odlišných přístupů, je použita implementace Ohtaniho konceptu v článku podrobněji popsána.

Uvedený materiálový model betonu je využit při řešení metodou konečných prvků [8], dále je prezentován numerický příklad, který modeluje železobetonový nosník pomocí izoparametrických čtyřuzlových stěnových konečných prvků [16], [7] a porovnává dosažené výsledky s výsledky experimentálních měření podle [4].

2 PRUŽNOPLASTICKÝ KONSTITUTIVNÍ MODEL BETONU

Zvolený konstitutivní model betonu kombinuje Chen-Chenovu podmínku plasticity [3] a model zpevnění vypracovaný Ohtaním [12]. Chen-Chenova podmínka plasticity byla formulována speciálně pro beton na základě experimentů prováděných mj. Kupferem [9].



Obr. 1: Chen-Chenova podmínka plasticity [1]

V oblasti tlak - tlak je podmínka plasticity popsána funkcí:

$$J_2 + \frac{A_{yc}}{3} I_1 - \tau_{yc}^2 = 0 \quad (1)$$

a v ostatních oblastech je funkcí:

$$J_2 + \frac{1}{6} I_1^2 \frac{A_{yt}}{3} I_1 - \tau_{yt}^2 = 0, \quad (2)$$

kde:

I_1 – je první invariant tenzoru napětí

J_2 – je druhý invariant deviatoru napětí

$A_{yc}, \tau_{yc}, A_{yt}, \tau_{yt}$ – se stanoví z materiálových konstant f_{yc}, f_{ybc} a f_{yt} .

$$A_{yc} = \frac{f_{ybc}^2 - f_{yc}^2}{2f_{ybc} - f_{yc}}, \quad (3)$$

$$\tau_{yc}^2 = \frac{f_{ybc}f_{yc}(2f_{yc} - f_{ybc})}{3(2f_{ybc} - f_{yc})}, \quad (4)$$

$$A_{yt} = \frac{f_{yc} - f_{yt}}{2}, \quad (5)$$

$$\tau_{yt}^2 = \frac{f_{yc}f_{yt}}{6}, \quad (6)$$

Podmínka je tedy definována pomocí mezi plasticity materiálu v jednoosém tlaku f_{yc} , mezi plasticity ve dvojosém tlaku f_{ybc} a mezi plasticity v jednoosém tahu f_{yt} , které jsou označeny v obr. 1.

Ohtaniho model zpevnění vznikl v návaznosti na Chenovu podmínku plasticity, navrhli jej Ohtani a Chen [12]. Model zpevnění je formulovaný pro tři parametry, a sice pro ekvivalentní napětí při jednoosém tlaku, dvojosém tlaku a jednoosém tahu.

Tvar funkce zpevnění má podobu:

$$\psi = \alpha_1 \left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma_c} \right\}^T \left\{ \frac{\partial \sigma_c}{\partial \varepsilon_{pc}} \right\} + \alpha_2 \left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma_{bc}} \right\}^T \left\{ \frac{\partial \sigma_{bc}}{\partial \varepsilon_{pbc}} \right\} + \alpha_3 \left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma_t} \right\}^T \left\{ \frac{\partial \sigma_t}{\partial \varepsilon_{pt}} \right\} \quad (7)$$

nebo může být zapsána ve zkráceném tvaru:

$$\psi = \alpha_1 Q_1 H_c + \alpha_2 Q_2 H_{bc} + \alpha_3 Q_3 H_t \quad (8)$$

Parametry α_1 , α_2 a α_3 určují vliv jednotlivých členů rovnice (8), závisí na oblasti namáhání a doporučené hodnoty uvádí [12]. Parametry zpevnění H_c , H_{bc} a H_t jsou derivace funkce popisující závislosti napětí na ekvivalentní plastické deformaci a získají ze zkoušek materiálu pro jednotlivé typy namáhání. Parametry zpevnění se aproximují Ramberg-Osgoodovou funkcí upravenou do tvaru [17]:

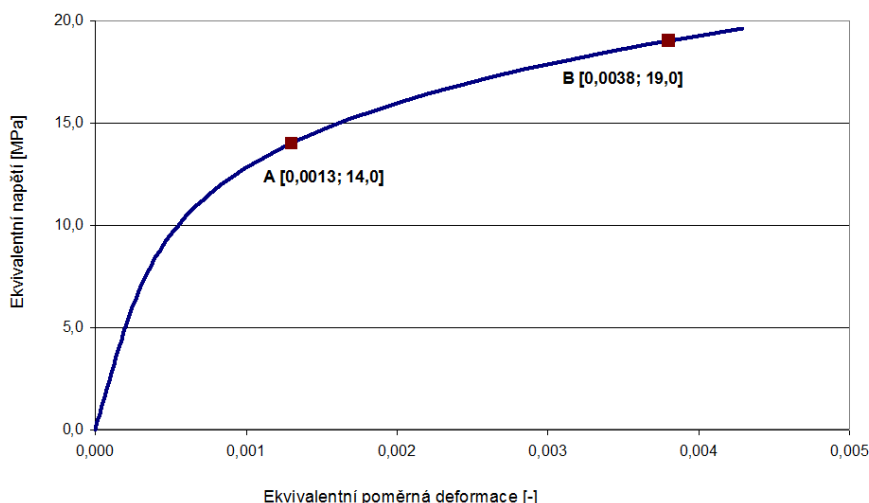
$$H = \frac{E_0}{kn} \left(\frac{\sigma}{E_0} \right)^{1-n} \quad (9)$$

kde hodnoty E_0 , k a n se určí ze znalosti pracovních diagramů zkoušek. Je potřebné znát počáteční modul pružnosti a dva body z pracovního diagramu. Výsledná aproximace má typický tvar zobrazený na obr. 2.

Parametry Q_1 , Q_2 a Q_3 jsou materiálové konstanty, které závisí na ekvivalentních napětích v jednoosém tlaku, dvojosém tlaku a jednoosém tahu. Určují se z aktuálního napěťového stavu, za předpokladu, že je splněna rovnice (1) nebo (2). Ve výpočtu se určují iteračním způsobem. Postup výpočtu ekvivalentních napětí je možné rozložit do kroků:

- 1) Určí se invariant tenzoru napětí I_I a druhý invariant deviátoru napětí J_2 .
- 2) Určí se oblast namáhání a definuje se podmínka plasticity a porušení.
- 3) Testuje se stav materiálu (pružný, plastický, porušený) pro danou napjatost.
- 4) Pro zplastizovaný materiál se určí oblast namáhání.
- 5) Vyjádří se odpovídající rovnice (1) nebo (2) pro aktuální úroveň namáhání.
- 6) Určí se nultý krok iteračního řešení (může se např. použít počáteční podmínka plasticity, podmínka porušení nebo podmínka plasticity z předešlého výpočetního kroku).

- 7) Iteračním způsobem se hledají hodnoty ekvivalentních napětí, dokud není splněna podmínka, že napětí (invariant tenzoru napětí, a druhý invariant deviátoru napětí) a ekvivalentní napětí splňují odpovídající rovnici vyjádřenou v kroku 5.



Obr. 2: Pracovní diagram betonu v jednoosém tlaku aproximovaný Ramberg-Osgoodovou funkcí

U zplastizovaného materiálu se parametry pro následné podmínky plasticity pro bod vyjádří s využitím vztahů (3) až (6).

Model vykazuje dobrou shodu s experimenty, ale pro použití vyžaduje velký počet vstupních parametrů.

3 VÝZTUŽ

Výztuž se může při analýze železobetonových konstrukcí zahrnout do výpočtu několika způsoby. V článku je používán model rozmazané výztuže, který předpokládá dokonalé spolupůsobení výztuže s betonem. Je vhodný pro rozptýlenou výztuž (např. drátkobeton), ale pro klasické výztužné vložky se také často používá [14]. Z uvedeného předpokladu o dokonalém spolupůsobení vyplývá, že model nerespektuje prokluz mezi výztuží a betonem.

Tuhost každého směru výztuže je možné popsat maticí tuhosti materiálu

$$\mathbf{D}_{s,i} = \begin{bmatrix} pE_{s,i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (10)$$

kde p je stupeň vyztužení určený z poměru plochy výztuže k celkové ploše průřezu (konečného prvku) a $E_{s,i}$ je modul pružnosti materiálu výztuže. Tuhost výztuže se přičítá k matici tuhosti materiálu \mathbf{D} pro beton. Výsledná matice tuhosti materiálu má tvar

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}_c + \sum_{i=1}^n \mathbf{D}_{s,i}, \quad (11)$$

kde:

\mathbf{D}_c – je matice tuhosti betonu,

$\mathbf{D}_{s,i}$ – je matice tuhosti výztuže v jednotlivých směrech.

U výztuže se předpokládá jednoosý stav napjatosti jako ideálně pružnoplastický nebo pružnoplastický s lineárním zpevněním. Podmínka plasticity pro jednoosý stav napjatosti má tvar

$$\sigma \leq f_{sy}, \quad (12)$$

kde:

σ – je napětí při jednoosém stavu napjatosti,

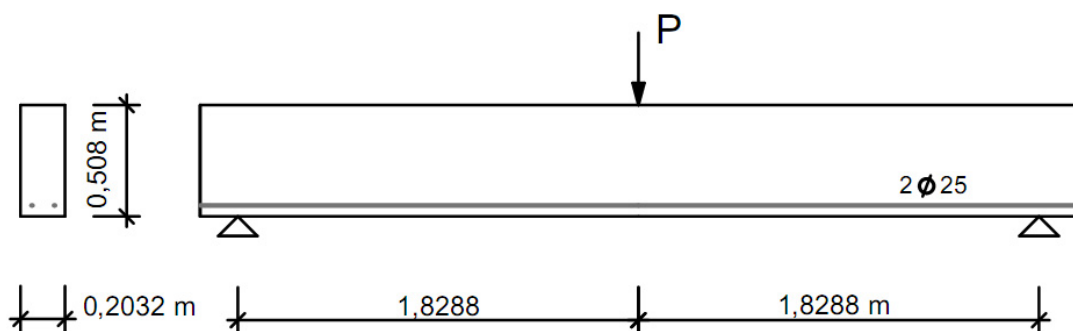
f_{sy} – je mez kluzu oceli.

Poměrná deformace je omezena hodnotou $\varepsilon_{s, \text{lim}}$.

4 NUMERICKÝ PŘÍKLAD

Uvedený konstitutivní model betonu byl použit na srovnání s dostupným experimentem nosníku zatíženého osamělou silou 200 kN [4]. Pro výpočet byl zvolen výpočetní program BSA určený pro analýzu betonových a železobetonových konstrukcí vyvíjený [19].

Rozpětí nosníku je 3,6576 m a průřez má tvar obdélníku. Průřez je vysoký 0,508 m a široký 0,2032 m. Schéma testovaného nosníku, zatížení a vyztužení je znázorněno na obr. 3. Zatížení působí uprostřed rozpětí na horní hraně. Výchozí materiálovou charakteristikou u betonu je modul pružnosti $E_{cm} = 26\,182$ MPa [11]. Výztužné vložky tvoří dva ocelové pruty průměru 25 mm. Ocelová výztuž má modul pružnosti $E_{s1} = 203\,255$ MPa a mez kluzu 309,36 MPa. U oceli se předpokládá pružnoplastický pracovní diagram s lineárním zpevněním $E_{s2} = E_{s1}/100$.



Obr. 3: Geometrie testovaného nosníku

Pevnost betonu v tlaku se pro uvedený model betonu určila ze vztahu podle [13] pro modul pružnosti

$$E_{cm} = 22(f_{uc}/10)^{0,3} \quad (13)$$

Tahová pevnost betonu se dopočetla z pevnosti v tlaku

$$f_{ut} = 0,1 f_{uc} \quad (14)$$

a pevnost betonu ve dvouosém tlaku byla stanovena

$$f_{ubc} = 1,2 f_{uc}. \quad (15)$$

Mez plasticity se u použitého konstitutivního modelu pro beton v tlaku a tahu uvažovala pro jednotlivé způsoby namáhání jako

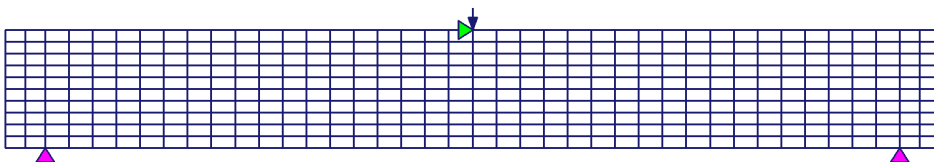
$$f_{yc} = 0,5 f_{uc}, \quad (16)$$

$$f_{ybc} = 0,5 f_{ubc}, \quad (17)$$

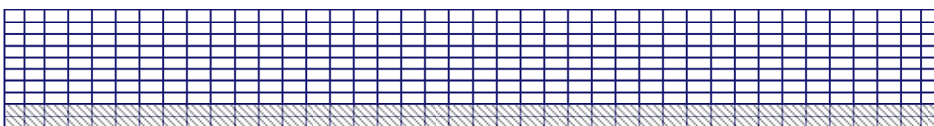
$$f_{yt} = 0,5 f_{ut}. \quad (18)$$

Pro výpočet je užita metoda konečných prvků s výpočetním modelem pro úlohu rovinné napjatosti. Výpočetní model tvoří pravidelná síť 400 izoparametrických konečných prvků se čtyřmi

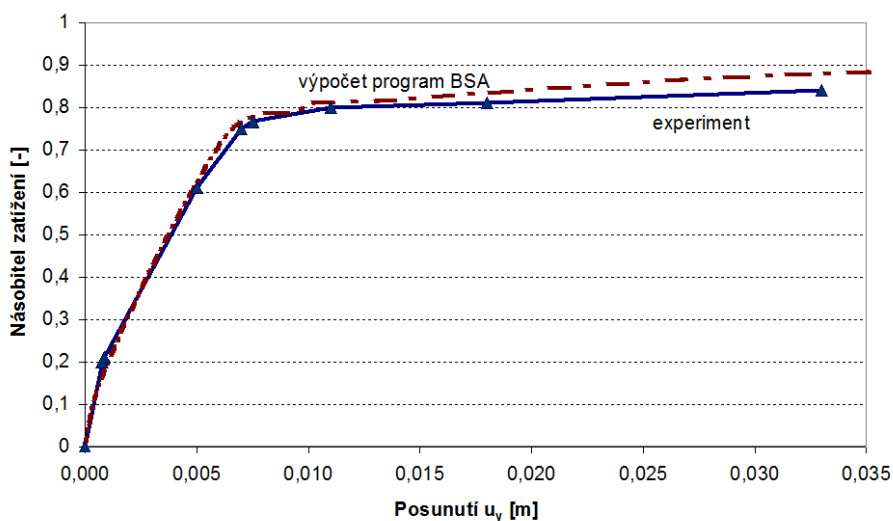
integračními body. Konečný prvek je podrobně odvozen v [7]. Celkově má výpočetní model 451 uzlů a je zobrazen na obr. 4. Výztuž se modelovala jako rozmazaná. Tuhost výztuže byla přepočtena do konečných prvků betonu podle (10) a (11). Oblasti modelu s výztuží jsou šrafované na obr. 5. Úloha byla řešena přírůstovým postupem pomocí Newton-Raphson metody.



Obr. 4: Výpočetní model



Obr. 5: Výpočetní model (šrafovaná oblast – beton + výztuž)

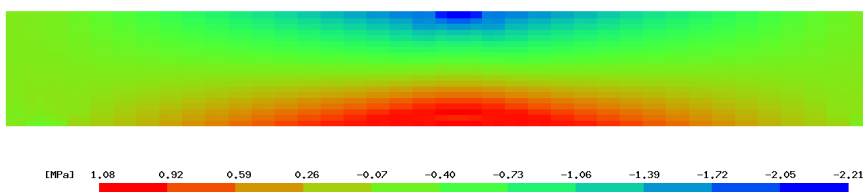


Obr. 6: Výsledky numerické analýzy

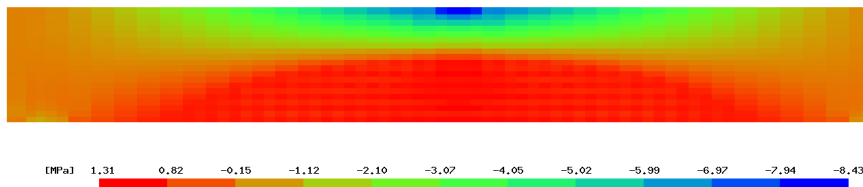
Na obr. 6 jsou uvedeny výsledky nelineární analýzy železobetonového nosníku pro zvolený konstitutivní model betonu, které jsou srovnány s výsledky experimentu [4]. Graf znázorňuje průhyb uprostřed rozpětí v závislosti na násobiteli zatížení.

Obr. 7 zobrazuje postupný rozvoj tažené oblasti během zatěžování. Shoda mezi experimentem a vypočtenými výsledky je velmi dobrá, pouze ve vyšších fázích zatěžování poskytuje výpočet mírně nadhodnocené výsledky.

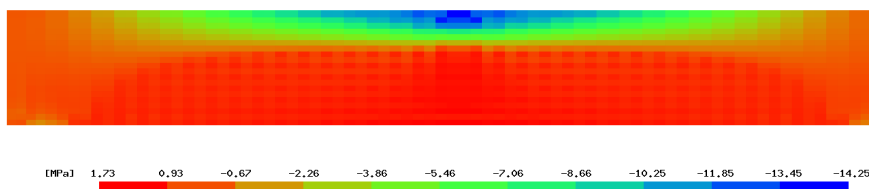
Násobitel zatížení = 0,09 (Max = 1,08 MPa; Min = -2,21 MPa)



Násobitel zatížení = 0,30 (Max = 1,31 MPa; Min = -8,43 MPa)



Násobitel zatížení = 0,65 (Max = 1,73 MPa; Min = -14,25 MPa)



Obr. 7: Normálové napětí σ_x během zatěžování [MPa]

5 ZÁVĚR

Využití nelineární analýzy při simulacích skutečného chování betonových a železobetonových konstrukcí se neustále rozšiřuje [10]. V současné době se především uplatňuje u stanovení globální odolnosti konstrukce, celkové únosnosti nebo analýzy problematických detailů konstrukcí. Pro modelování chování betonových a železobetonových konstrukcí existuje celá řada přístupů. V článku uvedený konstitutivní model betonu předpokládá pružnoplastické chování. Konstitutivní model betonu kombinuje Chen-Chenovu podmínku plasticity [3] a model zpevnění vypracovaný Ohtaním [12].

Pro ověření použitelnosti konstitutivního modelu betonu je provedeno srovnání s experimentem. Porovnáním experimentu a výpočtu v programu BSA je možné konstatovat, že shoda výsledků je dobrá. Vyšší únosnost vypočtená v numerické analýze v pozdější fázi zatěžování je možné přisoudit zvolenému konceptu modelování pružnoplastického betonu se zpevněním a způsobu modelování výztuže. Diskutovaný model betonu bude dále využit pro předpověď únosnosti podobných železobetonových konstrukcí.

Na výsledky ovšem nemá vliv pouze konstitutivní model betonu, ale také podrobnost a kvalita vytvořené sítě konečných prvků, model okrajových podmínek, typ konečného prvku, metoda řešení soustavy lineárních a nelineárních rovnic a další.

PODĚKOVÁNÍ

Tento výsledek byl získán za finančního přispění MŠMT ČR, projekt 1M0579, v rámci činnosti výzkumného centra CIDEAS. (This outcome has been achieved with the financial support of the Ministry of Education, Youth and Sports of the Czech Republic, project No. 1M0579, within activities of the CIDEAS research centre.)

LITERATURA

- [1] BROŽOVSKÝ, J. *Modelování fyzikálně nelineárního chování železobetonových konstrukcí*, Disertační práce. Ostrava: VŠB-TU Ostrava, 2003.
- [2] CEB - FIP Model Code 1990: Design Code. by Comité Euro-International du Béton, Thomas Telford, 1993. ISBN: 978-0727716965.
- [3] CHEN, A. C. T., CHEN, W. F. *Constitutive Relations for Concrete*. Journal of the Engineering Mechanics Division ASCE, 1975
- [4] FARIBORZ BARZEGAR, Layering of RC Membrane and Plate Elements in Nonlinear Analysis. Journal of the Struct. Div. 1988, Vol. 114, No. 11. p. 2474-2492.
- [5] KRÁLIK J., HUKEL D. Nelineární analýza interakcie oceľovej výstelky a železobetónovej steny šachty lokalizácie havárie za extrémneho pôsobenia tlaku a teploty. In *Modelování v mechanice 2010*. Mezinárodní konference. Ostrava: VŠB – TU Ostrava, 2010. ISBN 978-80-248-2234-1.
- [6] KRÁLIK J., ROZSÁR P., Deterministická a pravdepodobnostná analýza odolnosti železobetónového rámu s výplnovým murivom vystaveného explózií. In *Modelování v mechanice 2010*. Mezinárodní konference. Ostrava: VŠB – TU Ostrava, 2010. ISBN 978-80-248-2234-1.
- [7] KOLÁŘ V., KRATOCHVÍL J., LEITNER F., ŽENÍŠEK A. *Výpočet plošných a prostorových konstrukcí metodou konečných prvků*, Praha: SNTL, 1979.
- [8] KOLÁŘ, V., NĚMEC, I., KANICKÝ, V. *FEM Principy a praxe metody konečných prvků*. Praha: Computer Press, 1997.
- [9] KUPFER H., HILSDORF H., K., RÜSCH H. *Behaviour of Concrete Under Biaxial Stress*, Journal ACI, Proc. V. 66, č. 8, 1969.
- [10] MIKULA, J., JANDA Z. Moderní přístupy k návrhu segmentových mostních konstrukcí. SILNICE ŽELEZNICE, 2009, č. 2, ISSN 1803-8441.
- [11] MEGUID HEKAL S. A. *Solution of Plate Structures Respecting Real Material Properties*, Disertační práce. Brno: Brno University of Technology, 1992.
- [12] OHTANI, Y., CHEN, W. F. *Multiple Hardening Plasticity for Concrete Materials*. Journal of the EDM ASCE, 1988.
- [13] PROCHÁZKA, J. a kol. *Navrhování betonových konstrukcí 1. 2 vyd.* Praha: ČVUT v Praze, 2006. ISBN 80-903807-1-9.
- [14] Programový systém ATENA 2D: Theory Manual. Praha: Červenka Consulting, 2000
- [15] RAVINGER, J. Modelovanie nelineárneho pôsobenia železobetónového nosníka použitím MKP. Stavebnický časopis. 35, 1987-8, 571-589.
- [16] ROMBACH, G. *Anwendung der Finite-Elemente-Methode im Betonbau*. 2. Auflage. Berlin: Ernst & Sohn, 2007. ISBN 978-3-433-01701-2.
- [17] SUCHARDA, J. *Konstitutivní vztahy pro beton, diplomová práce*, Brno: FAST VUT v Brně, 1990.
- [18] SUCHARDA, O. Některé možnosti modelování betonových konstrukcí při nelineární analýze. Konstrukce, 2009, roč. 8, č. 5, s. 25-27. ISSN: 1213-8762.
- [19] SUCHARDA, O. Dílčí výzkumná zpráva CIDEAS za rok 2009, Implementace konstitutivního modelu železobetonu pro úlohy automatizovaného posudku konstrukcí ve 2D (1.1.3.1 16), MŠMT ČR, registrační číslo projektu 1M0579.

Oponentní posudek vypracoval:

Prof. Ing. Alois Materna, CSc., MBA, ČKAIT.

Doc. Ing. Zbyněk Keršner, CSc., Fakulta stavební, Vysoké učení technické v Brně.